Wiederholungsblatt 6

Das Lösen von Gleichungen nach der Unbekannten x

Definition: Polynom, Grad

$p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \qquad mit \;\; a_i \in IR$, heißt ein Polynom in x mit grad(p) = n, falls $a_n \neq 0$.

grad(p) nennen wir den Grad des Polynoms p.

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
&a.)\;\; f(x)=2x^4-x^2+1, \quad grad(f)=4\\
&b.)\;\; g(x)=x^3-x^2+x, \quad grad(g)=3\\
&c.)\;\; h(x)=-3x^2-x+1, \quad grad(h)=2\\
&d.)\;\; i(x)=-x+1, \quad grad(i)=1\\
&e.)\;\; j(x)=-b^5x^2-a^3x+c^4, \quad grad(j)=2
\end{aligned}
$$

Bemerkung: D.h. bei der Bestimmung des Grads eines Polynoms achten wir nur auf die Exponenten der Potenzen von x !

Vorgehensweise beim Lösen von Polynomgleichungen in x

I. Vorbereitung:

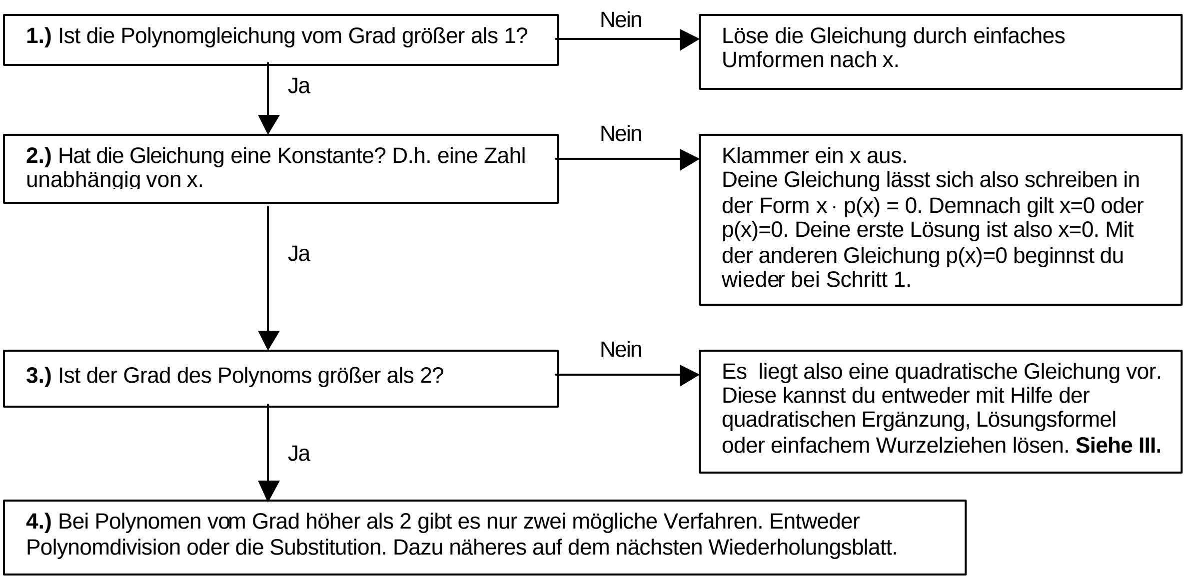
(1) Bringe die Ausdrücke alle auf eine Seite.
(2) Sortiere die Potenzen der Größe nach.
(3) Fasse zusammen, was zusammengefasst werden kann.
Beispiel: $4x^2+ax^2=(4+a)x^2$ (Distributivgesetz)
(4) Teile die ganze Gleichung durch den Faktor vor der größten Potenz von x.

Ein Beispiel:

$$x^2-4x+2=4x-x^2-4 \;\Leftrightarrow\; x^2-4x+2-4x+x^2+4=0 \;\Leftrightarrow\; 2x^2-8x+6=0$$

$$\Leftrightarrow\; 2x^2-8x+6=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-4x+3=0$$

II. Finden des Lösungsverfahrens



Wiederholungsblatt 6

II. Lösen quadratischer Gleichungen

Wenn wir den Schritt 3.) mit „Nein" beantwortet haben, dann gibt es jetzt nur noch zwei mögliche Gleichungstypen:

a.) $x^2 + c = 0$
Wir bringen das c auf die andere Seite und ziehen die Wurzel falls möglich.
Beispiele:

$$x^2 - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt{4} \vee x = -\sqrt{4} \;\Leftrightarrow\; x = 2 \vee x = -2$$

$$x^2 + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -3 \quad \textit{Keine Lösung (negative Wurzel!)}$$

b.) $x^2 + px + q = 0$
Wir lösen jetzt hier der Einfachheit halber mit der Lösungsformel. D.h. wir setzen einfach nur die Konstanten b und c in die Formel ein.

$$x^2 + px + q = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Sollte sich hierbei unter der Wurzel eine negative Zahl ergeben, so gibt es auch hier keine Lösung. (Hinweis: Sollte einmal vor dem x keine Zahl stehen, so denken wir uns da einfach eine 1)
Beispiele:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{-3}{2} + \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - (-4)} \vee x = -\frac{-3}{2} - \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - (-4)}$$

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 4} \vee x = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + 4} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}} \vee x = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} \vee x = \frac{3}{2} - \frac{5}{4} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{8}{2} = 4 \vee x = -\frac{2}{2} = -1$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{-3}{2} + \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 4} \vee x = -\frac{-3}{2} - \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 4}$$

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 4} \vee x = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - 4} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{7}{4}} \vee x = \frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{7}{4}}$$

$$\textit{Keine Lösung (negative Wurzel!)}$$

Übungsaufgaben: Berechne die Lösungen der folgenden Gleichungen

$$2 \cdot (2x^2 - 2) = x \cdot (4x + 6)$$

$$2x^2 - x^3 + 3 = x^2 - (x^3 + 4x) - 2$$

$$2x^2 + ax = x^2 + kx + ak$$

$$5x^3 + 2x^2 = x^3 + 2x^2 + x$$

$$\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - x^2 + 1 = 1 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2$$