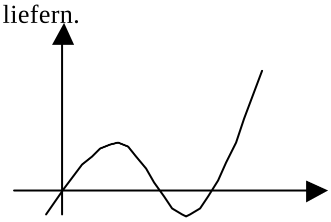
Lösung Klausur 3

Aufgabe 1:

a.) Um zu zeigen, dass sowohl nach 3/2 k als auch 2 k Sekunden der Wagen steht, müssen diese Werte nur in die Geschwindigkeitsfunktion eingesetzt werden. Bei beiden Werten müsste dann eine Geschwindigkeit von 0 cm/s rauskommen.

$$g_k(2k) = 12(2k)^3 - 42k(2k)^2 + 36k^2(2k) = 12\cdot 8\cdot k^3 - 42\cdot k\cdot 4\cdot k^2 + 36\cdot k^2\cdot 2\cdot k$$
$$= 96\cdot k^3 - 168\cdot k^3 + 72\cdot k^3 = 0$$
$$g_k(\frac{3}{2}k) = 12(\frac{3}{2}k)^3 - 42k(\frac{3}{2}k)^2 + 36k^2(\frac{3}{2}k) = 12\cdot\frac{27}{8}\cdot k^3 - 42\cdot k\cdot\frac{9}{4}\cdot k^2 + 36\cdot k^2\cdot\frac{3}{2}\cdot k$$
$$= \frac{81}{2}\cdot k^3 - \frac{189}{2}\cdot k^3 + \frac{108}{2}\cdot k^3 = 0$$

b.) Der Funktionsgraph hat auf jeden fall zwei Nullstellen nämlich 2k und 3/2k. Wenn wir genau hinsehen ist aber auch 0 ein Nullstelle. Es handelt es sich um eine Funktion dritten Grades, die wegen dem positiven Vorfaktor vor der größten Potenz von x von links unten nach rechts oben verläuft. Eine Skizze würde also ungefähr folgendes Bild liefern.



Also lässt sich vermuten, dass die Funktion zwischen 3/2k und 2k negativ ist und demnach auch in diesem Bereich der Wagen rückwärts fährt.

c.) Um die zurückgelegt Strecke auszurechnen, müssen wir die von dem Funktionsgraphen im Bereich von 0 bis 2k eingeschlossene Fläche bestimmen. Hierzu bedienen wir uns der Integralrechnung

$$I_1 = \int_0^{3/2k} 12x^3 - 42k\,x^2 + 36k^2x \;\; dx = \left[3x^4 - 14k\,x^3 + 18k^2x^2\right]_0^{3/2k}$$
$$= 3\left(\frac{3}{2}k\right)^4 - 14k\left(\frac{3}{2}k\right)^3 + 18k^2\left(\frac{3}{2}k\right)^2 - \left(30^4 - 14k\,0^3 + 18k^2\,0^2\right)$$
$$= 3\cdot\frac{81}{16}k^4 - 14k\frac{27}{8}k^3 + 18k^2\frac{9}{4}k^2 - 0$$
$$= \frac{243}{16}k^4 - \frac{756}{16}k^4 + \frac{648}{16}k^4 = \frac{135}{16}k^4 = 8\frac{7}{16}k^4$$
$$I_2 = \int_{3/2k}^{2k} 12x^3 - 42k\,x^2 + 36k^2x \;\; dx = \left[3x^4 - 14k\,x^3 + 18k^2x^2\right]_{3/2k}^{2k}$$
$$= 3(2k)^4 - 14k(2k)^3 + 18k^2(2k)^2 - \left(3\left(\frac{3}{2}k\right)^4 - 14k\left(\frac{3}{2}k\right)^3 + 18k^2\left(\frac{3}{2}k\right)^2\right)$$
$$= 48k^4 - 112k^4 + 72k^4 - \left(8\frac{7}{16}k^4\right) = 8k^4 - 8\frac{7}{16}k^4 = -\frac{7}{16}k^4$$
$$A = |I_1| + |I_2| = 8\frac{7}{16}k^4 + \frac{7}{16}k^4 = 8\frac{7}{8}k^4$$

Der Wagen legt also eine Strecke insgesamt $8\frac{7}{8}k^4$ cm zurück.

d.) Um die Entfernung vom Startort zu bestimmen, benötigen wir den Wert des Integrals von 0 bis 2k. Diesen Wert können wir entweder direkt ausrechnen oder wir benutzen die Ergebnisse aus c.)

$$\int_0^{2k} gk(x)\ dx = I_1 + I_2 = 8\frac{7}{16}k^4 - \frac{7}{16}k^4 = 8k^4$$

Also ist der Wagen nach 2k Sekunden effektiv vom Startort $8k^4$ cm entfernt.

e.) Für die zurückgelegte Strecke galt nach c.) s= $8\frac{7}{8}k^4$. Also müssen wir die Gleichung

$8\frac{7}{8}k^4 = 2272$ nur lösen. (Vorher müssen wir natürlich die m in cm umrechnen!)

$8\frac{7}{8}k^4 = 2272 \ \ |:8\frac{7}{8} \ \Leftrightarrow\ k^4 = 256 \ \ |\sqrt[4]{\ } \ \Leftrightarrow\ k = \pm 4$. Da wir laut Aufgabenstellung unsnur auf k>0 beschränken, ist die Lösung also k=4.

f.) Für k=3 ergibt sich folgende Funktion: $g_3(x) = 12x^3 - 126x^2 + 324x$. Um die maximale Geschwindigkeit auszurechnen, müssen wir also den Hochpunkt der Funktion bestimmen. Dazu benutzen wir wie immer die erste und zweite Ableitung. D.h. also zuerst die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen und dann zur Bestimmung ob Hoch- oder Tiefpunkt in die zweite Ableitung einsetzen.

$$g_3'(x) = 36x^2 - 252x + 324 \qquad g_3''(x) = 72x - 252$$

$$g_3'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 36x^2 - 252x + 324 = 0 \ \ |:36 \ \Leftrightarrow\ x^2 - 7x + 9 = 0$$

$$\textit{Lösungsformel liefert}\ \ x_1 = 5{,}3 \ \wedge\ x_2 = 1{,}7$$

$$g_3''(5{,}3) > 0 \quad g_3''(1{,}7) < 0$$

Also erreicht der Wagen nach 1,7 Sekunden seine höchste Geschwindigkeit. Einsetzen in die Ausgangsfunktion g_3 liefert eine Geschwindigkeit von 245,62 cm /s. Dies entspricht 884127,6 cm /h oder eben 8,841 km/h.

Aufgabe 2

a.) Wir bestimmen die Stammfunktion mit Hilfe der Substitution:

$$\int (2x-4)\cdot e^{2x^2-8x}\ dx$$

$$\textit{setze}\ z = 2x^2 - 8x$$

$$\frac{dz}{dx} = z' = 4x - 8 \quad \textit{umformen nach}\ dx$$

$$dx = \frac{dz}{4x-8} \quad \textit{einsetzen liefert}$$

$$\int (2x-4)\cdot e^{2x^2-8x}\ dx = \int (2x-4)\cdot e^z \frac{dz}{4x-8} = \int (2x-4)\cdot e^z \frac{dz}{2(2x-4)} = \int 0{,}5\cdot e^z\ dz$$

$$\textit{Stammfunktion von}\ 0{,}5e^z\ \textit{ist}\ \ 0{,}5e^z\ \ \textit{also}:$$

$$\int 0{,}5\cdot e^z\ dz = 0{,}5\cdot e^z = 0{,}5\cdot e^{2x^2-8x}$$

$$F(x) = 0{,}5\cdot e^{2x^2-8x}$$

b.) Um die eingeschlossene Fläche zu bestimmen, müssen wir zuerst die Nullstellen der Funktion ausrechnen.

$$(2x-4)\,e^{2x^2-8x} = 0 \ \Leftrightarrow\ 2x - 4 = 0 \vee e^{2x^2-8x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Da die e-Funktion nie Null wird, haben wir nur eine Nullstelle bei x=2. Also müssen wir insgesamt zwei Integrale bestimmen, um den Flächeninhalt auf dem Intervall von –3 bis 3 auszurechnen.

$$I_1 = \int_{-3}^{2} (2x-4)\,e^{2x^2-8x}\;dx = \left[0{,}5\,e^{2x^2-8x}\right]_{-3}^{2} = 0{,}5e^{2\cdot 2^2-8\cdot 2} - 0{,}5e^{2\cdot(-3)^2-8\cdot(-3)}$$

$$= 0{,}5e^{-8} - 0{,}5e^{42} \approx -8{,}696\cdot 10^{17}$$

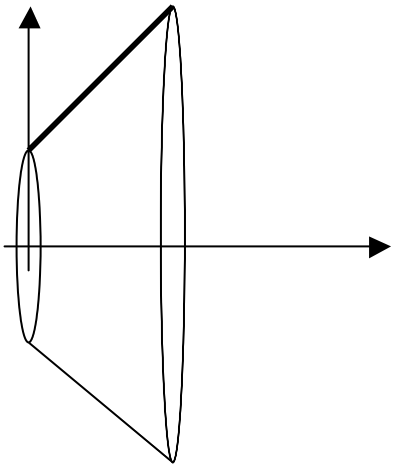
$$I_2 = \int_{2}^{3} (2x-4)\,e^{2x^2-8x}\;dx = \left[0{,}5\,e^{2x^2-8x}\right]_{2}^{3} = 0{,}5\,e^{2\cdot 3^2-8\cdot 3} - 0{,}5\,e^{2\cdot 2^2-8\cdot 2}$$

$$= 0{,}5e^{-6} - 0{,}5\,e^{-8} \approx 0{,}00107$$

$$A = |\,I_1\,| + I_2 = 8{,}696\cdot 10^{17}$$

Aufgabe 3

a.) Bei dem Körper handelt es sich um einen Kegelstumpf.



b.) Wir verwenden „einfach“ die Formel und müssen nur beachten bei der Bestimmung der Stammfunktion entweder vorher auszumultiplizieren oder die Substitution anzuwenden.

$$V = \pi\cdot\int_{0}^{3} (x+2)^2\;dx = \pi\cdot\int_{0}^{3} x^2 + 4x + 4\;\;dx = \pi\cdot\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 4x\right]_0^3$$

$$= \pi\cdot\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right]_0^3 = \pi\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 4\cdot 3 - (\frac{1}{3}\cdot 0^3 + 2\cdot 0^2 + 4\cdot 0)\right)$$

$$= \pi\cdot(9 + 18 + 12 - 0) = \pi\cdot 39$$