Klausur 1 Lösung

Aufg.	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c	$\sum$
Pkt. Max.	3	3	3	4	4	3	2	2	5	6	2	3	6	46

1.) Aufgabe:

Berechne die erste Ableitung. Fasse den Ableitungsterm auch zusammen.

$a.)\quad f(x) = 0{,}2 \cdot x^{-0{,}1} + \frac{3}{2} \cdot x^4 + 5$

$f'(x) = -0{,}02x^{-1{,}1} + 6x^3$

$b.)\quad f(x) = (a^2 - 2) \cdot x^{-4} + \frac{1}{3} \cdot c \cdot x^{\frac{4}{3}}$

$f'(x) = -4(a^2 - 2)x^{-5} + \frac{4}{9}cx^{\frac{1}{3}}$

$c.)\quad f(x) = (x-2) \cdot (x+2)$

$f(x) = x^2 - 4 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x$

2.) Aufgabe:

Gesucht ist eine ganzrationale und achsensymmetrische Funktion vierten Grades, deren Graph durch den Punkt P(1 / 2) läuft und dort eine Steigung von 5 hat. Zusätzlich hat der Funktionsgraph an der Stelle x=2 eine Tangente parallel zur Geraden y = 22 x - 7.

a.) Bestimme die Bedingungen für die Funktionsgleichung und stelle das Gleichungssystem auf.

$f(1) = 2 \quad f'(1) = 5 \quad f'(2) = 22$

$a + b + c = 2 \quad 4a + 2b = 5 \quad 32a + 4b = 22$

b.) Löse das Gleichungssystem und bestimme die Funktionsgleichung.

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2$

$\textit{Lösung Hinweis}:$

$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

(Hinweis: Falls du in a.) das Gleichungssystem nicht bestimmen konntest, benutze das folgende Gleichungssystem: a+b+c=6, 4a+2b=14, 16a+4b+c=45)

c.) Weise nach, dass die gefundene Funktion keine Wendepunkte hat.

$f''(x) = 6x^2 + 3 \neq 0$

$\textit{Lösung Hinweis}$

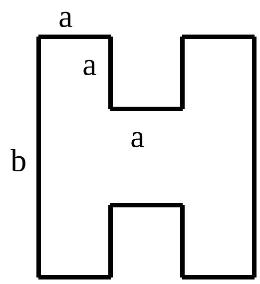
$f''(x) = 24x^2 + 6 \neq 0$

somit keine WP möglich, weil die zweite Ableitung keine Nullstellen hat.

Klausur 1 Lösung

3.) Aufgabe:

Ein Designer will den Anfangsbuchstaben eines bekannten Künstlers mit einer goldenen Umrandung verzieren. Für diese Umrandung steht dem Designer jedoch nur ein goldener Zierstreifen von 34 m Länge zur Verfügung. Wie groß sollte er die Maße des Buchstaben wählen, damit dieser einen möglichst großen Flächeninhalt und damit die größtmöglichste Werbefläche bildet?



a.) Stelle die Extremalbedingung **EB** auf. $A = 3ab - 2a^2$ *oder* $A = 2ab + a(b-2a)$

b.) Bestimme die Nebenbedingung **NB**. $2b + 10a = 34$

c.) Bestimme die Zielfunktion **ZF** und gib für die Unbekannte deiner Zielfunktion den Definitionsbereich an (den Geltungsbereich!).(*Zwischenlösung:* $A(a) = 51a - 17a^2$ *)*

$$b = 17 - 5a \quad A(a) = 3a(17-5a) - 2a^2 = 51a - 17a^2 \qquad 0 \le a \le \frac{17}{5}$$

d.) Löse das Extremwertproblem und gib an welche Maße der Buchstabe hat.

$$A'(a) = 51 - 34a \quad A'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \quad A''(a) = -34 \;\; A''(3/2) = -34 < 0 \Rightarrow HP$$

$$b = 17 - 5 \cdot \frac{3}{2} = 9{,}5$$

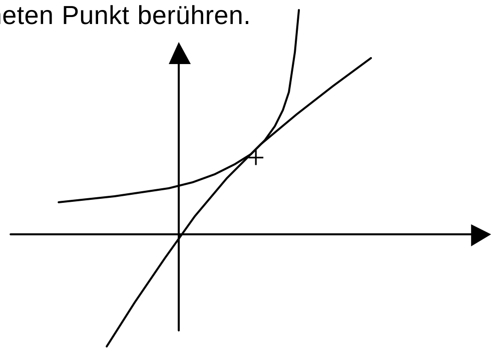
4.) Aufgabe:

Definition ***Berührpunkt***

Zwei Funktionen f *und* g *haben einen* ***Berührpunkt*** *an der Stelle* $x = a$ *, falls gilt:*

$$f(a) = g(a) \quad \textit{und} \quad f'(a) = g'(a).$$

a.) Fasse in Worte, was es heißt, wenn zwei Funktionen an der Stelle $x = a$ einen Berührpunkt haben. Zeichne dann in das untenstehende Koordinatensystem zwei Funktionen f und g, die sich in dem eingezeichneten Punkt berühren.



Klausur 1 Lösung

In einem Berührpunkt schneiden sich die Funktionen und haben dort auch die gleiche Steigung.

b.) Weise rechnerisch nach, dass die Funktionen $f(x) = x^2 - 4x$ und $g(x) = 2x^2 - 12x + 16$ an der Stelle $x = 4$ einen Berührpunkt haben.

$f(4) = 0 \quad g(4) = 0 \quad also\ f(4) = g(4),\ und$

$f'(4) = 4 \quad g'(4) = 4 \quad also\ f'(4) = g'(4)$

c.) Gesucht ist eine ganzrationale Funktion f dritten Grades, die punktsymmetrisch zum Ursprung ist und an der Stelle $x = 2$ die Funktion $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$ berührt.

Stelle die Bedingungen auf, löse das Gleichungssystem und gib die gesuchte Funktionsgleichung an.

$f(x) = ax^3 + bx \quad f'(x) = 3ax^2 + b$

$f\ und\ g\ berühren\ sich\ an\ der\ Stelle\ x = 2,\ also$

$f(2) = g(2) = -1$

$f'(2) = g'(2) = \frac{1}{2}$

$daraus\ ergeben\ sich\ die\ Gleichungen$

$8a + 2b = -1$

$12a + b = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x$