Station 3 Lösung
Hoch- und Tiefpunkte

Gegeben sind die erste und zweite Ableitung einer Funktion inkl. der Nullstellen (x_i) der ersten Ableitung. Bestimme die Hoch- und Tiefpunkte der Ausgangsfunktion. Benutze sowohl das Vorzeichenwechselkriterium als auch die zweite Ableitung.

(1)

$$f(x) = x + e^{-x} \quad f'(x) = 1 - e^{-x} \quad f''(x) = e^{-x} \quad x_0 = 0$$

$$f''(0) = e^{-0} = 1 > 0 \Rightarrow bei \ x = 0 \ ist \ ein \ TP$$

$$f(0) = 0 + e^{-0} = 1 \ also \ TP(0/1)$$

$$Vorzeichen \ wechselkri \ terium$$

$$f'(-1) = 1 - e^{-(-1)} = 1 - e^{1} < 0$$

$$f'(1) = 1 - e^{-1} = 1 - e^{-1} > 0$$

$$also \ bei \ x = 0 \ Vorzeichen \ wechsel \ von - nach \ +$$

$$d.h. \ bei \ x = 0 \ TP$$

(2)

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad f'(x) = e^{-x}(2x - x^2) \quad f''(x) = e^{-x}(2 - 4x + x^2) \quad x_0 = 0 \ x_1 = 2$$

$$f''(0) = e^{-0}(2 - 4 \cdot 0 + 0^2) = 2 > 0 \Rightarrow bei \ x = 0 \ ist \ ein \ TP$$

$$f(0) = 0^2 e^{-0} = 0 \ also \ TP(0/0)$$

$$f''(2) = e^{-2}(2 - 4 \cdot 2 + 2^2) = e^{-2} \cdot (-2) < 0 \Rightarrow bei \ x = 2 \ ist \ ein \ HP$$

$$f(2) = 2^2 e^{-2} = 0 \ also \ HP(2/4e^{-2})$$

$$Vorzeichenwechselkriterium$$

$$f'(-1) = e^{-(-1)}(2 \cdot (-1) - (-1)^2) = e^{1}(-3) < 0$$

$$f'(-1) = e^{-1}(2 \cdot 1 - 1^2) = e^{-1} > 0$$

$$f'(3) = e^{-3}(2 \cdot 3 - 3^2) = e^{-3}(-3) < 0$$

$$also \ bei \ x = 0 \ Vorzeichenwechsel \ von - nach + d.h. \ bei \ x = 0 \ TP$$

$$und \ bei \ x = 2 \ Vorzeichenwechsel \ von + nach - d.h. \ bei \ x = 2 \ HP$$

Station 3 Lösung
Hoch- und Tiefpunkte

(3)

$$f(x) = x e^{-k x^2} \quad f'(x) = e^{-k x^2}(1-2kx^2) \quad f''(x) = e^{-k x^2}(-6kx + 4k^2 x^3) \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2k}} \quad k>0$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = e^{-k\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)^2}\left(-6k\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)+4k^2\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)^3\right) = \sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-\frac{1}{2}}(-2k)<0$$

$$\Rightarrow bei\ x = \sqrt{\frac{1}{2k}}\ ist\ ein\ HP$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = \left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)e^{-k\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)^2} = \left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)e^{-\frac{1}{2}}\ also\ HP\left(\sqrt{\frac{1}{2k}} / \sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = e^{-k\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)^2}\left(-6k\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)+4k^2\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)^3\right) = -\sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-\frac{1}{2}}(-2k)>0$$

$$\Rightarrow bei\ x = -\sqrt{\frac{1}{2k}}\ ist\ ein\ TP$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)e^{-k\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)^2} = \left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)e^{-\frac{1}{2}}\ also\ TP\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}} / -\sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Vorzeichenwechselkriterium

$$f'\left(-\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = e^{-k\left(-\sqrt{\frac{1}{k}}\right)^2}\left(1-2k\left(-\sqrt{\frac{1}{k}}\right)^2\right) = e^{-1}(-1)<0$$

$$f'(0) = e^{-k0^2}\left(1-2k0^2\right) = e^0 = 1>0$$

$$f'\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = e^{-k\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right)^2}\left(1-2k\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right)^2\right) = e^{-1}(-1)<0$$

$$f'(-1) = 1-e^{-(-1)} = 1-e^1<0$$

$$f'(1) = 1-e^{-1} = 1-e^{-1}>0$$

$$also\ bei\ x = -\sqrt{\frac{1}{2k}}\ Vorzeichenwechsel\ von - nach + d.h.\ bei\ x = -\sqrt{\frac{1}{2k}}\ TP$$

$$und\ bei\ x = \sqrt{\frac{1}{2k}}\ Vorzeichenwechsel\ von + nach - d.h.\ bei\ x = \sqrt{\frac{1}{2k}}\ HP$$