

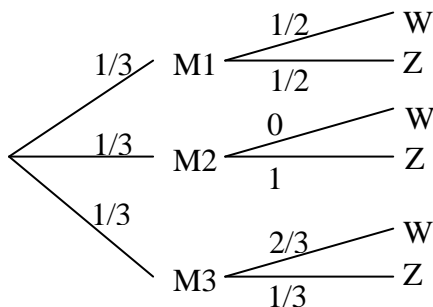
Klausur Lösung

Aufgabe 1

In einer Urne sind drei Münzen; eine davon ist eine Laplace-Münze, die zweite hat auf beiden Seiten „Zahl“ und die dritte ist so belegt, dass die Wahrscheinlichkeit für „Zahl“ $1/3$ ist. Der Urne wird zufällig eine Münze entnommen und diese Münze geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass „Zahl“ erscheint.

Lösung: Laplace-Münze heißt, die Wahrscheinlichkeit für Wappen oder Zahl beträgt 50%.

Die Wahrscheinlichkeit einer der Münzen aus der Urne zu nehmen ist jeweils $1/3$. Abhängig von der gezogenen Münze ergeben sich dann die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten für Wappen oder Zahl. Das ganze können wir in einem Baum darstellen:



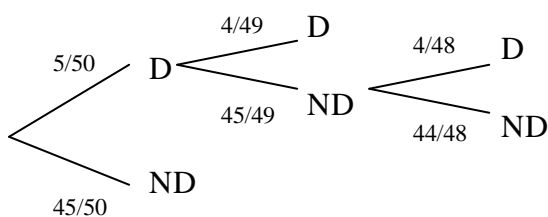
Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für „eine Zahl erscheint“ durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Zweige „M1-Z“, „M2-Z“ und „M3-Z“.

$$P(\text{„Zahl erscheint“}) = 1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 1/3 = 11/18$$

Aufgabe 2

Aus einer Sendung von 50 Glühbirnen, von denen 5 defekt sind, werden zufällig drei Glühbirnen gewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

Lösung: Ein Baum erleichtert uns die Berechnung. Der Baum wird hier nur angedeutet, ist also nicht komplett aufgezeichnet.



- a.) Keine der drei ausgewählten Glühbirnen ist defekt.

Lösung:

$$P(\text{„Keine Birne defekt“}) = 45/50 \cdot 44/49 \cdot 43/48$$

- b.) Genau eine der drei ausgewählten Glühbirnen ist defekt.

Lösung:

Entweder ist die erste, oder die zweite oder die dritte defekt. Wir haben also insgesamt 3 Zweige, in denen genau eine Birne defekt ist.

Klausur Lösung

$$P(\text{„Eine Birne defekt“}) = 5/50 \cdot 45/49 \cdot 44/48 + 45/50 \cdot 5/49 \cdot 44/48 + 45/50 \cdot 44/49 \cdot 5/48$$

c.) Mindestens eine der drei ausgewählten Glühbirnen ist defekt.

Lösung:

Das Gegenereignis von „Mindestens eine Birne defekt“ lautet „Keine Defekt“.

Also

$$P(\text{„Mindestens eine Birne defekt“}) = 1 - P(\text{„Keine Birne defekt“}) = 1 - 45/50 \cdot 44/49 \cdot 43/48$$

Aufgabe 3 (Achtung hier war ein Fehler in der Aufgabenstellung. Es muss heißen: „Es stehen 10 verschiedene Farben zur Verfügung“.)

Ein neuer Staat möchte als Nationalfahne eine Trikolore mit einem farbigen Kreis in der Mitte gestalten, als insgesamt 4 Farben verwenden. Es stehen verschiedene Farbe zur Auswahl. Wie viele Fahnen sind möglich, wenn jede Farbe nur einmal vorkommen darf?

Lösung:

Bei einer Fahne unterscheiden wir nicht nur welche Farben verwendet werden sondern auch in welcher Reihenfolge die Farben verwendet werden. Da wir jede Farbe nur einmal verwenden dürfen, haben wir für die erste Farbe 10 Möglichkeiten, für die zweite 9 usw..

Also insgesamt $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ mögliche verschiedene Fahnen.

Aufgabe 4

Fünf Studenten fahren mit einem Auto in den Urlaub. Nur zwei der Studenten haben einen Führerschein. Wie viele Sitzmöglichkeiten gibt es, wenn es genau 5 Plätze im Auto gibt?

Lösung:

Im Auto gibt es neben dem Fahrersitz 4 verschiedene Sitzplätze. Für den Fahrersitz haben wir nur 2 Möglichkeiten, für den Beifahrersitz dann noch 4 usw.

Also insgesamt $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ mögliche Sitzverteilungen.

Aufgabe 5

Ein Fahrschüler muss bei einer Prüfung 8 von 12 Fragen beantworten.

a.) Wie viele Auswahlmöglichkeiten hat er?

Lösung:

Es geht darum, von 12 Fragen 8 auszuwählen. Dabei kommt es nicht auf die Reihenfolge sondern nur auf die gewählten Fragen an.

$$\binom{12}{8} \text{ mögliche Auswahlmöglichkeiten.}$$

b.) Wie viele Möglichkeiten hat er, wenn er die ersten vier beantworten muss?

Lösung:

Wenn er die ersten vier beantworten muss, bleiben ihm nur noch 4 von den restlichen 8, die er

Klausur Lösung

frei auswählen darf.

$$1 \cdot \binom{8}{4} \text{ Auswahlmöglichkeiten.}$$

- c.) Wie viele Möglichkeiten bleiben ihm, wenn er mindestens 4 von den ersten 7 Fragen beantworten muss?

Lösung:

Mindestens 4 von den ersten 7 bedeutet, entweder 4 von den ersten sieben und die anderen 4 aus den restlichen 5, oder aber 5 von den ersten sieben und die anderen 3 aus den restlichen 5, oder aber 6 von den ersten sieben und die anderen 2 aus den restlichen 5 usw.

$$\text{Also } \binom{7}{4} \cdot \binom{5}{4} + \binom{7}{5} \cdot \binom{5}{3} + \binom{7}{6} \cdot \binom{5}{2} + \binom{7}{7} \cdot \binom{5}{1} \text{ Auswahlmöglichkeiten.}$$

Aufgabe 6

Berechne die Wahrscheinlichkeiten, dass bei zehnmaligen Werfen eines Würfels

- a.) genau dreimal die Augenzahl 6 auftritt,

Lösung:

Wenn wir uns hier einen Baum denken, dann stellen wir fest, dass sich nicht wie bei Aufgabe 2 die Wahrscheinlichkeiten von Ebene zu Ebene ändern, sondern egal bei welchem Wurf, die Wahrscheinlichkeit für eine 6 bleibt $1/6$. Die Frage ist also, wie viele Zweige gibt es, in denen genau dreimal von 10 Würfeln eine 6 gewürfelt wurde. Für diese drei 6-en haben wir maximal 10 mögliche Positionen in so einem Zweig. D.h. wir können das Problem der Anzahl der Zweige umformulieren zu: Wie viele Möglichkeiten gibt es, von 10 Positionen 3 auszuwählen, auf die wir dann die 6-en verteilen.

Dieses Problem ist aber gar nicht so schwer zu lösen, das sind nämlich genau

$$\binom{10}{3} \text{ Möglichkeiten. Also haben } \binom{10}{3} \text{ Zweige, in denen genau drei 6-en geworfen worden}$$

sind. Die Wahrscheinlichkeit eines Zweiges lautet: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$. Somit gilt:

$$P(\text{„genau drei 6-en bei 10 Würfeln“}) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

- b.) mindestens zweimal die Augenzahl 6 auftritt,

Lösung:

„Mindestens zwei 6-en“ hat als Gegenereignis „Keine 6“ oder „Eine 6“.

$$P(\text{„Keine 6“}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

$$P(\text{„genau eine 6“}) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \quad (\text{Hierbei liegen die gleichen Überlegungen zugrunde}$$

wie bei Aufgabe a.))

Somit gilt:

$$P(\text{„mindestens zwei 6-en bei 10 Würfeln“}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9$$

- c.) mindestens zweimal aber höchstens 9 mal die Augenzahl 6 auftritt.

Klausur Lösung

Lösung:

„Mindestens zwei aber höchstens 9 6-en“ hat als Gegenereignis „Keine 6“ oder „Eine 6“ oder „zehn 6-en“.

$$P(\text{„Keine 6“}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

$$P(\text{„genau eine 6“}) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \quad (\text{Hierbei liegen die gleichen Überlegungen zugrunde wie bei Aufgabe a.})$$

$$P(\text{„zehn 6-en“}) = \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$

Somit gilt:

$P(\text{„mindestens zwei aber höchstens 9 6-en bei 10 Würfeln“}) =$

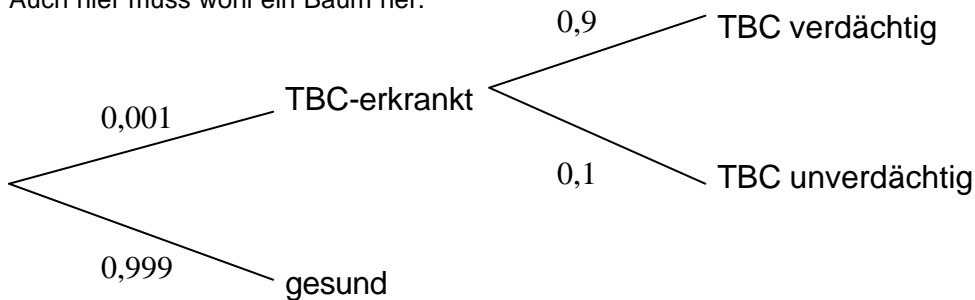
$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 - \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$

Aufgabe 7

Es wird eine Röntgenuntersuchung durchgeführt, um Fälle von Tuberkulose frühzeitig zu erkennen. Von den erkrankten Personen werden 90% als solche erkannt, von den Gesunden werden dagegen 1% als TBC-verdächtig registriert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen wir in einer Population, von der 0,1% TBC-krank ist, auf eine an TBC erkrankte und durch einen Test als TBC-verdächtig registrierte Person.

Lösung:

Auch hier muss wohl ein Baum her.



Daraus ergibt sich nach der Pfadregel

$$P(\text{„Krank und TBC verdächtig“}) = 0,001 \cdot 0,9 = 0,0009 = 0,09 \%$$