Übungsklausur
Lösung

Aufgabe 1:

a.) Immer daran denken: ein Produkt zweier Terme ist genau dann gleich Null, wenn einer der Terme Null ist. Somit gilt also:

$$(x^2-4)\cdot e^{(x^3-12x)}=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \vee e^{(x^3-12x)}=0 \quad aber\ e^{(x^3-12x)}\ ist\ immer \neq 0$$

$$d.h.\ x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$$

$$\Rightarrow N_1(2/0)\ N_2(-2/0)$$

b.) Mit der Substitution und der inneren Funktion $z=3x^2-12x$, ergibt sich folgende Rechnung:

$$z=x^3-12x$$

$$\frac{dz}{dx}=3x^2-12 \quad |\cdot dx$$

$$dz=(3x^2-12)\cdot dx \quad |:(3x^2-12)$$

$$\frac{dz}{(3x^2-12)}=dx$$

$$\int(x^2-4)\cdot e^{(x^3-12x)}dx=\int(x^2-4)\cdot e^z\frac{dz}{(3x^2-12)}=\int(x^2-4)\cdot e^z\frac{dz}{3\cdot(x^2-4)}$$

$$=\int\frac{1}{3}\cdot e^z\,dz=\frac{1}{3}\cdot e^z=\frac{1}{3}\cdot e^{x^3-12x}$$

$$F(x)=\frac{1}{3}\cdot e^{x^3-12x}$$

c.) Weil die Funktion an der Stelle 2 eine Nullstelle hat, müssen wir zur Bestimmung der Fläche zwei Integrale ausrechnen und dann betragsmäßig integrieren.

$$I_1=\int_{-1}^{2}(x^2-4)\cdot e^{(x^3-12x)}dx=\left[\frac{1}{3}\cdot e^{x^3-12x}\right]_{-1}^{2}=\frac{1}{3}\cdot e^{(2)^3-12(2)}-\frac{1}{3}\cdot e^{(-1)^3-12(-1)}=-19958{,}05$$

$$I_2=\int_{2}^{3}(x^2-4)\cdot e^{(x^3-12x)}dx=\left[\frac{1}{3}\cdot e^{x^3-12x}\right]_{2}^{3}=\frac{1}{3}\cdot e^{(3)^3-12(3)}-\frac{1}{3}\cdot e^{(2)^3-12(2)}=0{,}000041$$

$$A=|I_1|+|I_2|=19958{,}05004$$

Übungsklausur
Lösung

Aufgabe 2:

a.) Wie in der Aufgabe gegeben, können wir drei von vier Bedingungen sofort angeben. Aus diesen drei Bedingungen können wir b sofort und c nur in Abhängigkeit von a bestimmen. Durch die Angabe des Integralswerts erhalten wir aber eine vierte Gleichung, die sich dann relativ leicht nach a auflösen lässt.

$$f(0)=-1 \Leftrightarrow a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0+d=-1 \Leftrightarrow d=-1$$

$$f(1)=2 \Leftrightarrow a+b+c+d=2 \Leftrightarrow a+b+c-1=2 \Leftrightarrow a+b+c=3$$

$$f(-1)=-10 \Leftrightarrow a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d=-10$$

$$\Leftrightarrow -a+b-c-1=-10 \Leftrightarrow -a+b-c=-9$$

$$also$$

$$-a+b-c=-9$$

$$a+b+c=3$$

$$addieren\ liefert:\ 2b=-6 \Leftrightarrow b=-3$$

$$einsetzen\ in\ a+b+c=3\ liefert\ a-3+c=3 \Leftrightarrow c=6-a$$

$$Aus\ der\ Bedingung\ mit\ dem\ Integral \Rightarrow$$

$$\int_0^1 ax^3+bx^2+cx+d\ dx=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 ax^3-3x^2+(6-a)x-1\,dx=\left[\frac{1}{4}ax^4-x^3+\frac{(6-a)}{2}x^2-x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}a1^4-1^3+\frac{(6-a)}{2}1^2-1=\frac{1}{4}a-1-\frac{1}{2}a+3-1=-\frac{1}{4}a+1=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}a=-1 \Leftrightarrow a=4 \Rightarrow c=2$$

$$also\ \ f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$$

b.) Zuerst die erste und zweite Ableitung bestimmen, dann die Nullstellen der ersten Ableitung ausrechnen. Danach zur Bestimmung der Art der Extremwerte die Nullstellen von f' in f'' einsetzen. Und zu guter letzt die Koordinaten ausrechnen.

$$f'(x)=12x^2-6x+2$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}=0$$

$$x_{1/2}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{6}}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{1}{6}}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{-\frac{5}{48}} \quad \Rightarrow keine\ Nullstellen \Rightarrow keine\ Extremwerte$$

c.) Die Beschleunigungsfunktion ist die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion, also $b(x)=f'(x)=12x^2-6x+2$.

Den Punkt der stärksten Beschleunigung erhalten wir, indem wir den Hochpunkt der Beschleunigungsfunktion bestimmen. Verfahren siehe Text zu b.)

$b'(x) = 24x - 6$

$b'(x) = 0 \Leftrightarrow 24x - 6 = 0 \Leftrightarrow 24x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$b''(x) = 24 \Rightarrow b''(1/4) = 24 \Rightarrow bei\ \frac{1}{4}\ ist\ ein\ TP\ von\ b(x)$

D.h. also, es gibt keine lokale maximale Beschleunigung. Die Beschleunigung wächst für x gegen unendlich auch gegen unendlich.

Aufgabe 3:

a.) Durch Einsetzen in die Funktion bestätigen wir, dass k Nullstelle von $f_k(x)$ ist. Durch Polynomdivision erhalten wir

$(x^3 - k\,x^2 + k^2\,x - k^3) : (x - k) = x^2 + k^2$

$\underline{x^3 - k\,x^2}$

0

$k^2\,x - k^3$

$\underline{k^2\,x - k^3}$

0

Für das Restpolynom $x^2 + k^2$ ist klar, dass dieses immer größer Null ist. Deshalb kann es also keine weiteren Nullstellen geben.

b.) Wir berechnen zuerst einmal stur das Integral:

$$\int_0^k x^3 - k\,x^2 + k^2\,x - k^3\ dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{k}{3}x^3 + \frac{k^2}{2}x^2 - k^3\,x\right]_0^k = \left(\frac{1}{4}k^4 - \frac{k}{3}k^3 + \frac{k^2}{2}k^2 - k^3\,k\right) - (0)$$

$$= \frac{1}{4}k^4 - \frac{1}{3}k^4 + \frac{1}{2}k^4 - k^4 = -\frac{7}{12}k^4$$

Hier ist also ein kleiner Fehler in der Aufgabe. Auf dem Klausurblatt im Internet ist dies geändert worden. Wir sehen, dass für jedes k das Integral immer kleiner bzw. ungleich Null ist. Es kann demnach also schon gar nicht für k<0 größer als Null werden. Aber das habt ihr ja sicher auch schon bemerkt.