Übungsklausur 2

Lösung

1.) Aufgabe:

Bei einem chemischen Prozess entsteht bei der Spaltung des Stoffes A der Stoff B. Durch die anderen Zerfallsprodukte und äußere Einflüsse teilt sich der Stoff B allerdings auch wieder.
Die Stoffmenge S in Gramm des Stoffes B wird durch die folgende Funktion $S(t) = 2te^{1-t}$ ($t \hat{=} Anzahl\ der\ Stunden$) für $t \geq 0$ beschrieben.

(a) Berechne

(i) die Nullstellen der Funktion,

$2te^{1-t} = 0 \Leftrightarrow 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$NS(0/0)$

(ii) die Extrema,

$S'(t) = 2e^{1-t} + 2te^{1-t}(-1) = 2e^{1-t}(1-t)$

$S''(t) = 2e^{1-t}(-1)(1-t) + 2e^{1-t}(-1) = 2e^{1-t}(-1+t-1) = 2e^{1-t}(t-2)$

$S'(t) = 0 \Leftrightarrow 2e^{1-t}(1-t) = 0 \Leftrightarrow (1-t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$S''(1) = 2e^{1-1}(1-2) = 2e^{0}(-1) = -2 < 0 \Rightarrow HP\ bei\ x = 1$

$S(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^{1-1} = 2$

$HP(1/2)$

(iii) die Wendepunkte und

$S''(t) = 2e^{1-t}(t-2)$

$S'''(t) = 2e^{1-t}(-1)(t-2) + 2e^{1-t} = 2e^{1-t}(-t+2+1) = 2e^{1-t}(3-t)$

$S''(t) = 0 \Leftrightarrow 2e^{1-t}(t-2) = 0 \Leftrightarrow (t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

$S'''(2) = 2e^{1-2}(3-2) = 2e^{-1} \neq 0 \Rightarrow WP\ bei\ x = 2$

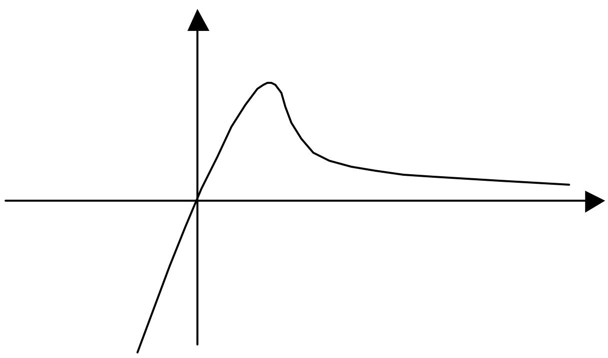
$S(2) = 2 \cdot 2 \cdot e^{1-2} = 4 \cdot e^{-1} \approx 1{,}471$

$WP(2/1{,}471)$

(iv) das Verhalten der Funktion im Unendlichen.

$\lim\limits_{x \to \infty} S(t) = 0 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} S(t) = -\infty$

Skizziere den Funktionsgraphen für $t \geq 0$.



(b) Beantworte die folgenden Fragen.

(i) Wie groß ist die Ausgangsmenge vom B?

Lösung: $S(0) = 0$ Zum Beginn ist 0 gr. Vom Stoff B vorhanden.

Übungsklausur 2
Lösung

(ii) Zu welchem Zeitpunkt ist die größte Stoffmenge von B vorhanden?
Lösung: Nach einer Stunde, exakt 2 gr.

(iii) Interpretiere den Verlauf des Funktionsgraphen im Unendlichen. Was heißt das für die Stoffmenge von B?
Lösung: Da der Graph gegen Null strebt, heißt das, das die Stoffmenge von B zwar immer weniger wird, aber auch nach noch so langer Zeit noch Spurenelemente zu finden sind.

(c) Angenommen, der Zuwachs der Stoffmenge würde sich zum Zeitpunkt t=0,5 nicht mehr ändern. Wie viel Gramm des Stoffes hätten wir dann nach 2 Stunden?
Lösung: Wir bestimmen die Tangente an der Stelle t=0,5.

$$S'(0{,}5) = 2e^{0{,}5}(1-0{,}5) = e^{0{,}5} \approx 1{,}649$$

$$S(0{,}5) = 2\cdot 0{,}5 \cdot e^{0{,}5} \approx 1{,}649$$

$$t_{0,5}(x) = 1{,}649\,x + b$$

$$1{,}649 = 1{,}649 \cdot 0{,}5 + b \iff b = 0{,}8245$$

$$t_{0,5}(x) = 1{,}649\,x + 0{,}8245$$

$$t_{0,5}(2) = 1{,}649 \cdot 2 + 0{,}8245 = 4{,}1225$$

Wir hätten nach 2 Stunden 4,1225 gr. Des Stoffes B.

(d) Barbara behauptet, die n-te Ableitung der Funktion lautet:

$$S^{(n)}(t) = 2e^{1-t}\left((-1)^{n+1}n + (-1)^n t\right)$$

(i) Überprüfe diese Aussage anhand deiner ersten zwei Ableitungen aus (a).

$$S^{(1)}(t) = 2e^{1-t}\left((-1)^{1+1}1 + (-1)^1 t\right) = 2e^{1-t}\left(1+(-1)t\right) = 2e^{1-t}\left(1-t\right)$$

$$S^{(2)}(t) = 2e^{1-t}\left((-1)^{2+1}2 + (-1)^2 t\right) = 2e^{1-t}\left(-2+t\right) = 2e^{1-t}\left(t-2\right)$$

(ii) Berechne ausgehend von der n-ten Ableitung die (n+1)-te Ableitung.

$$S^{(n+1)}(t) = \left(S^{(n)}(t)\right)' = \left(2e^{1-t}\left((-1)^{n+1}n + (-1)^n t\right)\right)'$$

$$= 2e^{1-t}(-1)\left((-1)^{n+1}n + (-1)^n t\right) + 2e^{1-t}(-1)^n$$

$$= 2e^{1-t}\left((-1)^{n+2}n + (-1)^{n+1}t + (-1)^n\right)$$

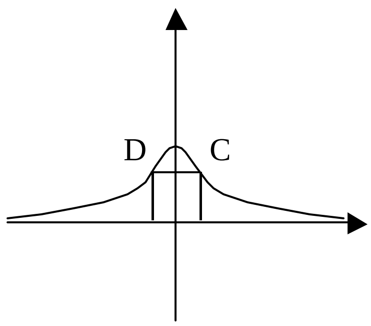
$$= 2e^{1-t}\left((-1)^{n+2}n + (-1)^{n+1}t + (-1)^{n+2}\right)$$

$$= 2e^{1-t}\left((-1)^{n+2}(n+1) + (-1)^{n+1}t\right)$$

$$= 2e^{1-t}\left((-1)^{(n+1)+1}(n+1) + (-1)^{n+1}t\right)$$

2.) Aufgabe:

Unter den Funktionsgraphen der Funktion $f(x) = e^{-0.5x^2}$ soll ein Rechteck einbeschrieben werden, dessen Grundkante auf der x-Achse und die Eckpunkte C und D symmetrisch zur y-Achse auf dem Funktionsgraphen liegen. Die Kanten des Rechtecks sollen parallel zu den Achsen liegen.



Übungsklausur 2

Lösung

(a) Berechne die Maße und die Fläche des Rechtecks, wenn der Punkt C bei $x = 2$ und der Punkt D bei $x = -2$ liegt. Wie lauten dann die Koordinaten von A und B?

$$f(-2) = f(2) = e^{-0.5\cdot 2^2} = e^{-2} \approx 0{,}135$$

$$also\ C(2/0{,}135)\ D(-2/0{,}135)\,A(-2/0)\,B(2/0)$$

$$und\ Breite\ des\ \mathrm{Re}chtecks 2\cdot 2 = 4\ LE\ \ und\ Höhe\ 0{,}135\ LE\ (Längeneinheiten)$$

$$\Rightarrow A = 4\cdot 0{,}135 = 0{,}54\,FE\ (Flächeneinheiten)$$

(b) Wie sind die Maße des Rechtecks zu wählen, damit der Flächeninhalt möglichst maximal wird?

(i) Bestimme dazu allgemein den Flächeninhalt A(x) des Rechtecks, wenn der Punkt C bei x und D bei –x liegt.

$$Breite\ des\ \mathrm{Re}chtecks\ a = 2\cdot x$$

$$Höhe\ des\ \mathrm{Re}chtecks\ b = f(x)$$

$$A = a\cdot b = 2\cdot x\cdot f(x) = 2\,x\,e^{-0{,}5\,x^2} = A(x)$$

(ii) Berechne den Hochpunkt der Funktion A(x).

$$A(x) = 2\,x\,e^{-0{,}5\,x^2}$$

$$A'(x) = 2\,e^{-0{,}5\,x^2} + 2\,x\,e^{-0{,}5\,x^2}(-1\,x) = 2\,e^{-0{,}5\,x^2}(1-x^2)$$

$$A'(x) = 0 \iff (1-x^2) = 0 \iff x = \pm 1$$

$$A''(x) = 2\,e^{-0{,}5\,x^2}(-1x)(1-x^2) + 2\,e^{-0{,}5\,x^2}(-2\,x) = 2\,e^{-0{,}5\,x^2}(-x + x^3 - 2x)$$

$$= 2\,e^{-0{,}5\,x^2}(x^3 - 3x)$$

$$A''(1) = 2\,e^{-0{,}5}(-2) < 0 \Rightarrow HP\ bei\ x = 1$$

$$A(1) = 2\,e^{-0{,}5} = 1{,}213$$

Also das Rechteck mit den Maßen $a = 2\ b = e^{-0{,}5}$ hat den maximalen Flächeninhalt von 1,213 FE.