

Ableitungsregeln

Bisher haben wir insgesamt 5 von 6 verschiedene Ableitungsregeln kennen gelernt:

| | | |
|------------------------------|----------------------------|--|
| (1) Potenzregel | $f(x) = x^n$ | $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ |
| (2) Faktorregel | $f(x) = a \cdot u(x)$ | $f'(x) = a \cdot u'(x)$ |
| (3) Summen- Differenzenregel | $f(x) = u(x) \pm v(x)$ | $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$ |
| (4) Produktregel | $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ | $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ |
| (5) Quotientenregel | $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ | $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$ |
| (6) Kettenregel | $f(x) = u(v(x))$ | $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ |

Und ein paar Spezialableitungen kennen wir auch noch (oder lernen wir jetzt halt kennen):

| | | |
|--|------------------|-----------------------|
| (7) e-Funktion | $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| (8) sin-Funktion | $f(x) = \sin(x)$ | $f'(x) = \cos(x)$ |
| (9) cos-Funktion | $f(x) = \cos(x)$ | $f'(x) = -\sin(x)$ |
| (10) In-Funktion (natürlicher Logarithmus) | $f(x) = \ln(x)$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$ |

Dabei sind $u(x)$ und $v(x)$ beliebig differenzierbare Funktionen und $a \in \mathbb{R}$ ist eine Konstante.

Häufig müssen mehrere dieser Ableitungsregeln angewandt werden, um die Ableitung einer Funktion zu bestimmen. Entscheidend für die Wahl der richtigen Ableitungsregel ist immer die letzte mathematische Operation innerhalb des abzuleitenden Terms.

Um diesen Sachverhalt besser verstehen zu können, schauen wir uns zuerst vielleicht mal ein Beispiel an, das wir mit „Leichtigkeit“ ableiten können. Wir wollen hierbei ganz gezielt sehr detailliert angeben, welche Ableitungsregeln wir verwenden.

Bilde die Ableitung der Funktion $f(x) = 4 \cdot x^3 + 2 \cdot x$

- I. Die letzte mathematische Operation, die wir hier ausführen müssen, um diese Funktion auswerten zu können, ist die Addition der Terme $4x^3$ und $2x$. D.h. also wir müssen die Summenregel anwenden.

$$f'(x) = (4 \cdot x^3)' + (2 \cdot x)'$$

- II. Wir müssen also jetzt die Funktionen innerhalb der Klammern ableiten. Bei genauem Hinsehen stellen wir fest, dass dort die Konstanten Faktoren 4 und 2 auftauchen. Also verwenden wir in einem nächsten Schritt die Faktorregel.

$$f'(x) = 4 \cdot (x^3)' + 2 \cdot (x)'$$

- III. Bei den Funktionen in den Klammern handelt es sich jetzt um einfache Potenzfunktionen. Also müssen wir diese mit der Potenzregel ableiten.

$$f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x^0$$

- IV. Mit der eigentlichen Ableitung der Funktion f sind wir jetzt eigentlich fertig. Jetzt müssen wir nur noch unter Verwendung der Gleichheit $x^0 = 1$ zusammenfassen.

$$f'(x) = 12 \cdot x^2 + 2$$

Aufgabe 1

Notiere dir neben den Gleichungen, welche Ableitungsregeln (hier reicht die Nummer aus der obigen Tabelle) angewandt wurden und warum. Der Ausdruck $e^{(\cdot)}$ soll heißen, wir leiten die e-Funktion ab.

| | |
|---|--|
| $f(x) = (2x^3 + x^2) \cdot e^{3x}$ | Hier kommt noch nichts hin. Erst in der nächsten Zeile notieren wir, welche Ableitungsregel verwendet wurde! |
| $f'(x) = (2x^3 + x^2)' \cdot e^{3x} + (2x^3 + x^2) \cdot (e^{3x})'$ | |
| $f'(x) = ((2x^3)' + (x^2)') \cdot e^{3x} + (2x^3 + x^2) \cdot (e^{3x} \cdot (3x)')$ | |
| $f'(x) = (2(x^3)' + 2x) \cdot e^{3x} + (2x^3 + x^2) \cdot (e^{3x} \cdot 3(x)')$ | |
| $f'(x) = (2 \cdot 3 \cdot x^2 + 2x) \cdot e^{3x} + (2x^3 + x^2) \cdot (e^{3x} \cdot 3 \cdot 1)$ | |
| Jetzt nur noch zusammenfassen und ausklammern | |
| $f'(x) = e^{3x} \cdot (6x^3 + 9x^2 + 2x)$ | Fertig! |

Aufgabe 2

Leite nach dem Schema aus Aufgabe 1 die folgenden Funktionen ab und notiere die dir Ableitungsregeln. Die Anzahl der Zeilen sagt nichts darüber aus, wie viel Schritte notwendig sind.

a.)

| | |
|------------------------|--|
| $f(x) = \sin(x^2 + 4)$ | |
| | |
| | |
| | |
| | |

b.)

| | |
|----------------------------------|--|
| $f(x) = e^x + \sin(x) \cdot x^2$ | |
| | |
| | |
| | |
| | |

Für zukünftige Diskussionen über Ableitungen sollten wir uns auf folgende Schreibweise einigen.

Mit $((x^2 + 4)^7)'$ ist die gesamte Ableitung gemeint. Mit $(x^2 + 4)^{7'}$ nur die Ableitung der Potenz "hoch 7". Wir benötigen dies für die Anwendung der Kettenregel bei dem oben beschriebenen Schema.

c.) Bilde die erste Ableitungen: $f(x) = (2x^2 - 8) \cdot e^{2x+1}$ $g(x) = (x^2 + 4x)^5 \cdot \sin(x^2)$

d.) Welche Frage stellt sich bei der Bildung der Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot x^2$