

Integralrechnung

Fortsetzung

Definition: Ein **orientierter Flächeninhalt** ist der Flächeninhalt von Flächen versehen mit einem negativen Vorzeichen, falls die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, und versehen mit einem positivem Vorzeichen, falls die Fläche oberhalb der x-Achse liegt.

Das Integral $\int_a^b f(x) dx$ berechnet die Summe der orientierten Flächeninhalte, die der Graph der Funktion f im Intervall von a bis b mit der x-Achse einschließt.

Um das Integral bestimmen zu können, müssen wir die Stammfunktion F von f bestimmen. Für diese Stammfunktion muss gelten: $F'(x) = f(x)$.

(Im Zukunft wollen wir die Stammfunktion einer Funktion immer mit dem Großbuchstaben der Funktion kennzeichnen.)

Mit den folgenden Integrationsregeln können wir Stammfunktionen bestimmen:

	Regel	$f(x)$	$F(x)$
1.)	Potenzregel	x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
2.)	Faktorregel	$a \cdot u(x)$	$a \cdot U(x)$
3.)	Summen- Differenzregel	$u(x) \pm v(x)$	$U(x) \pm V(x)$

Somit können wir mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung Integrale ausrechnen.

Satz: Sei F eine Stammfunktion von f , so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Aufgabe 1: Bestimme die Integrale.

b.) $\int_1^4 x^2 - 6x dx =$

b.) $\int_0^3 3x^2 - 6x + 1 dx =$

c.) $\int_{-1}^3 \frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - 3x + 4 dx =$

Aufgabe 2:

Wir füllen wieder mal Wasser in eine Badewanne. Die Funktion

$$f(x) = 0,001x^3 - 0,105x^2 + 2,7x$$

($x \hat{=}$ Anzahl der Minuten, $y \hat{=}$ Fließgeschwindigkeit in l/min) beschreibt die Art und Weise, wie wir das Wasser innerhalb von 60 Minuten in die Wanne einlaufen bzw. aus der Wanne rauslaufen lassen.

- Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die Hoch- und Tiefpunkte. Skizziere den Funktionsgraphen im Intervall von 0 bis 60.
- Wie lange haben wir das Wasser in die Wanne laufen lassen und wie lange heraus?
- Zu welchem Zeitpunkt fließt das meiste Wasser? Wie viel Wasser fließt in der Minute?
- Drehen wir in der 40-ten Minute den Wasserhahn auf oder zu?
- Wie viel Wasser ist insgesamt in die Wanne geflossen?
- Wie viel Wasser ist insgesamt geflossen?
- Wie viel Wasser ist nach 60 Minuten noch in der Wanne?

