Übungsblatt 1

Bitte lies dir dieses Übungsblatt sorgfältig durch und versuche das Beispiel nachzuvollziehen. Versuche dann, wenn du Probleme bei den Hausaufgaben oder den Übungsaufgaben hattest, das beschriebene Verfahren auf diese Aufgaben anzuwenden. Diskutiere ruhig mit deinem Tischpartner über die Vorgehensweise. Mache dir notfalls Notizen an den Rand.
Hinweis: Versuche nur das zu tun, was im Algorithmus steht, nicht mehr und nicht weniger**!**

Nur Mut, nicht schon beim ersten Lesen verzweifeln!!!! :-)

Definition: Lineare Gleichung mit n Unbekannten ($n \in IN, n > 0$)

Eine Gleichung der Form $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n = b$ mit den Unbekannten x_1 bis x_n und den Faktoren a_1 bis $a_n \in IR$ und $b \in IR$ nennen wir eine ***lineare Gleichung mit n Unbekannten***.

Definition: Lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten ($n \in IN, n > 0$)

Wenn wir mindestens zwei lineare Gleichungen mit denselben Unbekannten x_1 bis x_n haben. Dann bezeichnen wir diese Menge von Gleichungen als ***Lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten.***

Für die Lösbarkeit von **Linearen Gleichungssystemen mit n Unbekannten und n Gleichungen (kurz LGS)** können wir drei Fälle unterscheiden:

(1) Das LGS ist eindeutig lösbar, d.h. für jede Unbekannte gibt es eine eindeutige Lösung.
(2) Das LGS ist nicht lösbar.
(3) LGS ist mehrdeutig lösbar, d.h. für mindestens eine Unbekannte gibt es keine eindeutige Lösung.

Bevor wir jetzt einen Algorithmus für das Lösen von GLS in den Fällen (1) und (2) angeben, wiederholen wir das Additions- bzw. Subtraktionsverfahren.

Wiederholung Additions- bzw. Subtraktionsverfahren:

Gegeben seien zwei lineare Gleichungen mit n Unbekannten x_1 bis x_n **(** $n \in IN, n > 0$ **).** Unsere Aufgabe besteht nun darin, aus 2 linearen Gleichungen mit n Unbekannten, eine Gleichung mit n-1 Unbekannten zu erstellen.
Wir verfahren wie folgt:

1. **Sortiere die Gleichungen nach den Unbekannten.**
2. **Suche dir eine Unbekannte, die in beiden Gleichungen vorkommt.**
3. **Multipliziere beide Gleichungen mit Faktoren derart, dass nachher die Faktoren vor der gewählten Unbekannten gleich sind.**
4. **Je nach Vorzeichen de Faktoren vor der gewählten Unbekannten addieren oder subtrahieren wir die beiden Gleichungen. Wir erhalten eine neue Gleichung, in der die von uns vorher bestimmte Unbekannte nicht mehr auftaucht.**

Ein Beispiel:
Gegeben: 2 x = 4 - y + 3 z, x - 2 y + 2 z = 5

1. Sortieren :
   2 x + y - 3 z = 4
   x - 2 y + 2 z = 5
2. Unbekannte wählen : Wir wählen mal z
3. Vorfaktoren anpassen:
   2 x + y - 3 z = 4 | mal 2
   x - 2 y + 2 z = 5 | mal 3
   ⇔ 4 x + 2 y - 6 z = 8
   3 x - 6 y + 6 z = 15
4. Addieren bzw. Subtrahieren: In unsrem Fall addieren
   7 x - 4 y = 23 (fertig! Kein z mehr!)

Mit dieser kleinen Wiederholung sind wir nun soweit und können uns mit dem Lösen von LGS beschäftigen.

Algorithmus zum Lösen von LGS (Lineare Gleichungssysteme mit n Unbekannten und n Gleichungen):

1. Sortiere die Gleichungen nach den Unbekannten.
2. Suche dir eine Unbekannte, die in mindestens zwei Gleichungen vorkommt.
   Versuche nun aus den n Gleichungen mit n Unbekannten n-1 Gleichungen mit n-1 Unbekannten mit Hilfe des Additions- bzw. Subtraktionsverfahren zu erhalten.
3. Notiere dir alle Gleichungen, die unsere gewählte Unbekannte nicht enthalten. Diese sind unsere ersten Gleichungen von den n-1 gesuchten.
4. Multipliziere die restlichen Gleichungen derart, dass nachher die Faktoren vor der gewählten Unbekannten gleich sind.
5. Addiere oder Subtrahiere jeweils zwei verschiedene Gleichungen von den Gleichungen aus Schritt 4 solange, bis du mit den Gleichungen aus 3 insgesamt auf n-1 Gleichungen kommst, die dann alle nicht mehr die von uns gewählte Unbekannte erhalten.
6. Eine alte Gleichung, in der unsere gewählte Unbekannte vorkommt, notieren wir uns separat. Diese Gleichung benötigen wir nachher, um die Lösung für diese Unbekannte zu bestimmen.
7. Mit den n-1 Gleichungen und den darin enthaltenen n-1 Unbekannten wiederholen wir die Schritte 2. bis 7. so lange, bis wir nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten haben. Dann erst folgt Schritt 8. und 9.
8. Diese letzte Gleichung können wir lösen.
9. Wenn wir die Schritte 1 bis 7 richtig durchgeführt haben, müssten wir insgesamt n-1 Gleichungen im Verkauf unserer Rechnerei separat notiert haben. Siehe Schritt 6. In diese Gleichungen können wir das Ergebnis aus 8. einsetzen. Es wird sich zeigen, dass wir dann wieder eine Gleichung von diesen haben , die lösbar ist. So setzen wir nacheinander unsere neuen Lösungen in die separat notierten Gleichungen und erhalten so eine Lösung für alle Unbekannte und somit für unseres LGS. Fertig !

Ein kleines Beispiel:

Schritt	
1.	$x + 3z = 7$ $2x + y + z = 4$ $x + 2y + 3z = 7$ (Schon sortiert, wie schön)
2.	Wähle y
3.	$x + 3z = 7$
4.	$2x + y + z = 4$ | mal 2 $x + 2y + 3z = 7$ | mal 1 $4x + 2y + 2z = 8$ $x + 2y + 3z = 7$
5.	Subtrahieren $3x - z = 1$
6 .	Merken einer Gleichung mit y. Wir haben also die Gleichungen $2x + y + z = 4$ * (Merken) $x + 3z = 7$ $3x - z = 1$ Dies sind also unsere 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten Jetzt fangen wir also mit Schritt 2 wieder an. Siehe nächste Spalte!

Schritt	
2.	Wähle z
3.	Gibts nicht
4.	$x + 3z = 7$ | mal 1 $3x - z = 1$ | mal 3 $x + 3z = 7$ $9x - 3z = 3$
5.	Addieren $10x = 10$
6.	Merken einer Gleichung mit z. Wir haben also die Gleichungen $x + 3z = 7$ * (Merken) $10x = 10$
8.	Lösen der letzten Gleichung: $x = 1$
9.	Einsetzen der Lösung für x in die gemerkten Gleichungen: $2 \cdot 1 + y + z = 4$ $1 + 3z = 7$ Die letzte von diesen beiden Gleichungen können wir lösen : $3z = 6 \Leftrightarrow z = 2$ Dann gilt in der oberen Gleichung: $2 \cdot 1 + y + 2 = 4 \Leftrightarrow 4 + y = 4 \Leftrightarrow y = 0$ Also haben wir die Lösung : $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$

Bemerkung: Sollten bei diesem Verfahren eine Gleichung entstehen, die nicht mehr lösbar ist, z.B. 4 = 7, dann ist das gesamte LGS nicht lösbar!